به نام خدا

متغیرهای تصادفی پرکاربرد

الف) حالت پیوسته

ب) حالت گسسته

- متغیر تصادفی برنولی

- متغیر تصادفی هندسی

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی یا پاسکال

متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی، نشان دهنده تعداد آزمایش‌های لازم برای r امین رخداد پیشامد مورد نظر است:

X : تعداد آزمایش‌های لازم برای r امین رخداد پیشامد مورد نظر

بنابراین X مقادیر از مجموعه‌ی $\{r, r+1, \dots\}$ را اختیار می‌کند.

در ادامه می‌خواهیم pmf این متغیر تصادفی را به دست بیاوریم

$$P_X(i) = P_r\{X = i\} \quad , \quad i \in \{r, r+1, \dots\}$$

$$P_r\{X=i\} = P_r \left\{ \begin{array}{r} \text{در } i-1 \text{ آزمایش اول ، } r-1 \text{ بار پیش آمد مورد نظر رخ داده و} \\ \text{در } i \text{ امین آزمایش ، پیش آمد مورد نظر رخ دهد (} r \text{ امین بار)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P_X(i) = P_r\{X=i\} = \binom{i-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(i-1)-(r-1)} \times p$$

$$\Rightarrow P_X(i) = P_r\{X=i\} = \binom{i-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{i-r}$$

$$X \sim \text{Pascal}(r, p)$$

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای Binomial

متغیر تصادفی دوجمله‌ای نشان دهنده تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در n بار تکرار آزمایش تصادفی است.

X : تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در n بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

در ادامه می‌خواهیم pmf متغیر تصادفی دوجمله‌ای را به دست بیاوریم.

$$P_X(i) = P_r\{X=i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

* متغیر تصادفی پواسن   Poisson

متغیر تصادفی پواسن نشان دهنده‌ی تعداد رخداد پیشامد مورد نظر در بی نهایت تکرار آزمایش تصادفی است. به عبارت دیگر متغیر تصادفی پواسن حد متغیر تصادفی دوجمله‌ای است، وقتی آزمایش‌ها را به تعداد بسیار زیاد تکرار کنیم. به شرط اینکه $n \to \infty$, $np \to a$

متغیر تصادفی پواسن یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی گسسته است که برای مدل سازی بسیاری از پدیده های طبیعی کاربرد دارد. به عنوان مثال تعداد غلط های تایپی در یک متن، تعداد دفعات تغییر مدار الکترون های یک اتم، تعداد افرادی که به یک صف وارد یا از آن خارج می شوند را می توان با یک متغیر تصادفی پواسن مدل سازی کرد.

متغیر تصادفی پواسن دارای خاصیت پایداری نیز هست.

X : تعداد رخدادهای پیشامد مورد نظر در بی نهایت تکرار آزمایش تصادفی

$n \to \infty \, , \quad np \to a$

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

در ادامه می‌خواهیم pmf متغیر تصادفی پواسن را به دست بیاوریم. برای این منظور از pmf متغیر تصادفی دوجمله‌ای، مفهوم حد وقتی $n \to \infty$, $np \to a$ استفاده می‌کنیم.

$$P_r\{X = i\} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ np \to a}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\Rightarrow P_r\{X=i\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\, p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{\overbrace{n}^{n}\overbrace{(n-1)\dots(n-i+1)}^{n}}{i!}\, p^i (1-p)^{\overbrace{n-1}^{n}}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{n^i p^i}{i!} (1-p)^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to a}} \frac{(np)^i}{i!} (1-p)^n$$

گرانش حد

$$\lim_{n\to\infty} n\pm k = n$$

$$\Rightarrow P_r\{X=i\} = \lim_{n\to\infty} \frac{(np)^i}{i!} e^{-pn}$$

$$np \to a$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-p)^n = e^{-np}$$

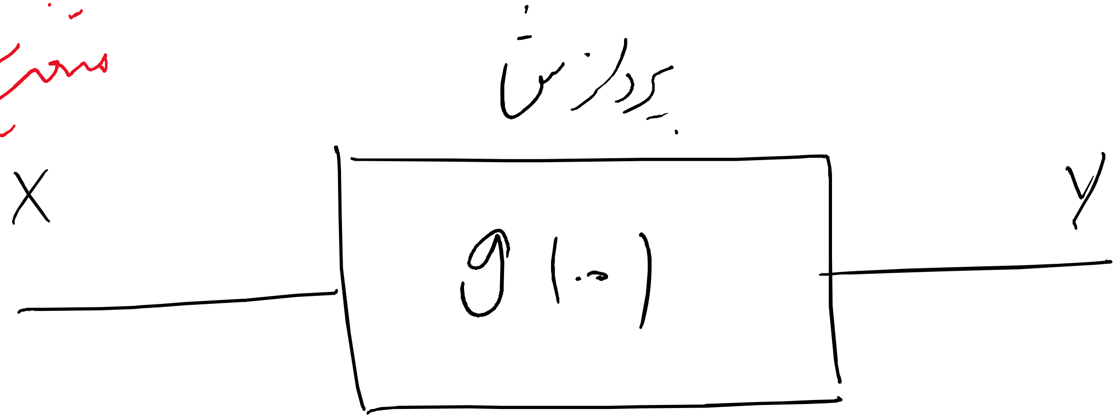
$$\Rightarrow P_r\{X=i\} = \frac{a^i}{i!} e^{-a} = P_X(i)$$

$$X \sim \text{Poisson}(a)$$

تابعی از یک متغیر تصادفی $g(X)$

در کنار متغیرهای تصادفی، وقتی که با یک متغیر تصادفی را آنالیز کنیم یا عملیات ساده پردازشی بر روی آن انجام دهیم، با توابعی از متغیر تصادفی روبه رو هستیم. به عنوان مثال در مورد متغیر تصادفی X، ممکن است که بخواهیم $|X|$ یا X^2 یا هر ترکیب خطی از X را بررسی کنیم. بنابراین در حالت تابعی از یک متغیر تصادفی به صورت $Y = g(X)$ سروکار خواهیم داشت.

متغیر تصادفی



$$, \quad Y = g(X)$$

Y نیز یک متغیر تصادفی خواهد بود

$$Y = g(X) \equiv g(X(\xi)) \equiv Y(\xi)$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\Omega \xrightarrow{X(\cdot)} \mathbb{R} \xrightarrow{g(\cdot)} \mathbb{R} \implies \Omega \xrightarrow{g(X)} \mathbb{R}$$

در این موارد می‌خواهیم بدانیم که خصوصیات آماری Y به چه صورت است.

به عبارت دیگر می‌خواهیم توابع احتمال متغیر تصادفی Y را برحسب توابع احتمال متغیر تصادفی X (با داشتن توابع احتمال متغیر تصادفی X) به دست بیاوریم.

برای این منظور از تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی Y استفاده می‌کنیم.

$$F_Y(y) = P_r\{Y \le y\} = P_r\{g(x) \le y\}$$

$Y = g(x)$

$$= P_r\{X \in A_y\} = \int_{A_y} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

با اعمال عملیات ریاضی مرتبط با نامساوی

$g(x) \le y$

محاسبه انتگرال

تابعی از y $= F_Y(y)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

مثال: متغیر تصادفی X با تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ را در نظر می‌گیریم. برای حالت‌های زیر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را به دست بیاورید.

1) $Y = aX + b$

2) $Y = |X|$

1) $Y = aX + b$

$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\} = P_r\{aX + b \leq y\}$$

$$= P_r\{aX \leq y - b\} = \begin{cases} P_r\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} & a > 0 \\ P_r\left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\} & a < 0 \end{cases}$$

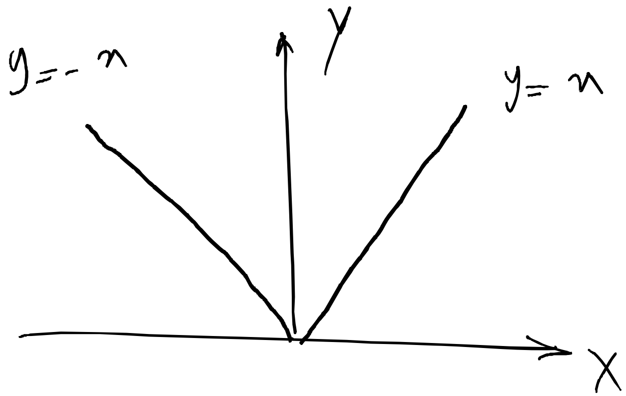
$$\Longrightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$Y = aX + b$$

2) $Y = |X| \qquad (y \geq 0)$



$$F_Y(y) = P_r\{Y \leq y\}$$

$$= P_r\{|X| \leq y\} = \underbrace{P_r\{\overset{x_1}{-y} \leq X \leq \overset{x_2}{y}\}}_{F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y), & y \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

* اگر متغیر تصادفی X گسسته باشد و داشته باشیم $Y=g(X)$ ، لازم است

که تابع pmf متغیر تصادفی Y را بدست بیاوریم.

$$P_Y(i) = P_r\{Y=i\} = P_r\{X \in A_i\} = \sum_{A_i} P_X(x)$$

مثال: فرض کنیم X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای باشد، تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ را به دست بیاورید.

$$X \in \{0,1,2,\dots,n\} \quad , \quad P_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$Y = X^2 \Rightarrow Y \in \{0, 1^2, 2^2, \dots, n^2\}$$

$$\sqrt{j} \in \{0,1,\dots,n\}$$

$$P_r\{Y=j\} = P_r\{X^2=j\} \underset{\uparrow}{=} P_r\{X=\sqrt{j}\} = \begin{cases} P_X(\sqrt{j}), & \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$X \in \{0,1,\dots,n\}$$

* اگر شرایط خاصی برقرار باشد، می‌توانیم $f_Y(y)$ را به یک فرم بسته برحسب $f_X(x)$ به دست بیاوریم.

- راه حل ساده برای یافتن $f_Y(y)$

فرض کنیم که $Y = g(X)$ و X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. اگر معادله $y = g(x)$ دارای تعداد شمارش‌پذیری جواب به فرم $x_1, x_2, \ldots, x_k$ باشد. ($x_1, x_2, \ldots, x_k$ تعیین از g دارند) و تابع $g(\cdot)$ در نقاط جواب مشتق‌پذیر باشد. در این صورت داریم.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)|_{x_i}}$$

(x_i ها تابعی از y هستند)

مثال: اگر متغیر تصادفی Y به صورت زیر با متغیر تصادفی X در ارتباط باشد، تابع چگالی احتمال Y را به دست بیاورید.

$$Y = ax + b = g(x)$$

$$y = ax + b = g(x) \longrightarrow x = \frac{y-b}{a} = x_1$$

معادله خطی دارای یک جواب است.

مشتق پذیر

$$g'(x) = a$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x)|_{x_1}} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

تمرین: برای $Y = |X| = g(X)$ آیا شرایط استفاده از راه حل ساده وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، $f_Y(y)$ را از رابطه مربوطه بدست بیاورید.

* مفهوم امید ریاضی   Expectation

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی به نام $g(X)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\{g(X)\} \underset{\text{به اختصار}}{=} Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(x)}_{\text{مقادیری که } g(x) \text{ اختیار می‌کند}} \overbrace{f_X(x)}^{\text{فراوانی مقادیری که } g(x) \text{ اختیار می‌کند}} dx$$

$\Leftarrow$ $E g(x)$ معیاری از میانگین مقادیری که $g(x)$ اختیار می‌کند، به دست می‌دهد = میانگین آماری مقادیری که $g(x)$ اختیار می‌کند.

* اگر به این نکته توجه کنیم که $g(x)$ خودش یک متغیر تصادفی است، می‌توان نوشت

$$Y = g(X)$$

در نتیجه

$$E g(x) = E Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

براساس قضیه اساسی امید ریاضی به راحتی می‌توان نشان داد که

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = Eg(X)$$

(اثبات ساده است و برای مطالعه یا تمرین)

نکته دیگر در مورد امید ریاضی $E(\cdot)$ این است که امید ریاضی یک عملگر خطی است.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E g_i(X)$$

اثبات :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)\right) f_X(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_i g_i(x) f_X(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f_X(x)\,dx}_{E g_i(X)}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E g_i(X)$$

توجه: همواره می‌توانیم جای دو عملگر خطی را با هم عوض کنیم (اولویت مهم نیست)

به عنوان مثال:

$$E\left(d\, g(x)\right) = d\left(E\, g(x)\right)$$

$$E\left(\int g(x)\right) = \int E\, g(x)$$

از خاصیت خطی بودن عملگر امید ریاضی می توانیم برای ساده سازی حل مسائل نیز استفاده کنیم.

مثال: فرض کنیم متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ را در اختیار داریم

و داریم $y = ax + b$ امید ریاضی متغیر تصادفی y را به دست بیاورید

$$E y = E(ax+b) = E ax + \underbrace{E b}_{\int_{-\infty}^{\infty} b f_x(x) dx = b} = a E x + b$$

$$\Rightarrow \quad EY = aEX + b = a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b$$

مثال : فرض کنیم $Y = a\cos(2\pi f t + \theta)$ که در آن θ یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0, \pi]$ است. EY و EY^2 را محاسبه کنید. (a یک پارامتر غیر تصادفی است)

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$$

$$EY = E\, a\cos(2\pi f t + \theta) = a\,E\cos(2\pi f t + \theta)$$

$$= a \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(2\pi f t + \theta)\,\underbrace{f_\theta(\theta)}_{1/\pi}\,d\theta$$

$$= \frac{a}{\pi} \quad \sin(2\pi f t + \theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi} \qquad = \frac{a}{\pi} \times 0 = 0$$

$$E y^2 = E\, a^2 \cos^2(2\pi f t + \theta) = a^2 E \cos^2(2\pi f t + \theta)$$

$$= a^2 E \frac{1}{2}\left(1 + \cos(4\pi f t + 2\theta)\right)$$

$$E y^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \underbrace{E \cos(4\pi f t + 2\theta)}_{0} = \frac{a^2}{2}$$

با کمک امید ریاضی به توابع و پارامترهای در ارتباط با متغیرهای تصادفی تعریف می‌شوند
که می‌توان از آنها برای آنالیز خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی استفاده کرد.

یکی از این پارامترها، ممان های یک متغیر تصادفی هستند.

* ممان های یک متغیر تصادفی

Moment

برای یک متغیر تصادفی X ، ممان مرتبه‌ی n ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\underbrace{E X^n}_{\text{ممان مرتبه‌ی n ام متغیر تصادفی X}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$$